信号理論アラカルト
— 超易しい超関数 —

吉川 昭、小濱 剛[†]
元近畿大学システム生命科学科、[†]近畿大学システム生命科学科
E-mail:g-finch@rinku.zaq.ne.jp, [†]kohama@waka.kindai.ac.jp

最終稿 May. 1, '16

「学生諸君を困らせるに難問要らぬ、易しい問題一つで悶死する」とは筆者らの一人の故恩師電磁気学教授の言である。面白く奥深くかつ幅広い意味をもつ言であるが、その幅広い意味の中には、実はうわべだけしか知らない理論、概念、公式、定理を我々は理解しているつもりで得意になって使っていることがある、という警告も含まれているかも知れない。これは逆に学生諸君から素朴な質問を受けたとき、学生さんばかりでなく自分自身をも納得させせるだけの易しい説明をできなかったときに痛感させられる。もちろん、本研究会のお歴々においてはそんなことはない、ないではあろうが、ま、中には、こんな基本的なこと今更聞けないなどととの思いを何度か経験された方もひょっとしたらおられるかも知れない。
そこで本稿では、我々とは異なりいまだ知ったかぶりをする必要もない純な学生さんにご登場をいただいて、「今更聞けない」素朴な質問を投げかけてもらう。もちろん答える方は冷や汗ながらのにわか勉強で、十分な説明ができるわけもなく、足りない部分はこの分野での名僧知識である読者自信で補っていただきたい。
そんなこんなで、本記事は系統だった信号理論の話からはほど遠く、信号理論を取り巻く話題を順不同で並べたアラカルトとし、読者には気楽につまみ食いをお楽しみいただきたい。
早速始めよう。第一話は超関数である。

1　定義を広げれば超となる

学生：先生、超関数って何ですか?

先生：わ！ い、いきなりなんですか、ノックくらいしなさい（いきなり超関数だなんて、やっかいだな。ちょっと勉強しないとやばいな）。あー、あのね君、私は今弁当を食べ終わったばかりで、ちょっと昼寝をするから…

学生：ははーん、そんなこと言って、知らないんでしょう超関数を。

先生：馬鹿なこと言ってはいけません…、とはいうものの、正直なところ詳しくはないよ。それでもいいかい？

学生：いいんです、そんなこと分かっていますから先生から超関数の真髄を聞こうなんて思っちゃいません。ほんのさわりだけでいいんです。

先生：（ムッ）なんだか引っかかるね。それに第一キミ、「さわり」というのはね、物事の本質、話の聞かせどころのことを言うんだよ。それなのに真髄は聞きたくないからさわりだけを言えとは矛盾していますよ。

学生：へ？そうなんですか、さわりというのは聞かせどころ、真髄なんですか。へーーーえ、知らなかった。少しは物知りなんですね先生も。

先生：あ、あ、あのねー！そ、そういう言い方はないでしょ…

学生：分かりました、分かりましたよもう。つまらない会話で字数を稼ごうとしているんじゃないでしょ

うね。読者はもう飽きていますよ。僕も以後言葉に気をつけますから先に進みましょう。とにかく、そのさわりとやらを短く易しく教えて下さい。

先生：うむ、できるかどうかとにかくやってみよう。恐らく君は「超」という字に驚いたのではないかな?「超音波」と言ったって音波は音波です。 ま、人は最初は人間が聞こえる音だけを「音」と思ってたんだね。実はそれは音の一部に過ぎなかった、しかし、人間に聞こえない音もあるということを知ってそれに「超」という字を付けて区別した、ってとこでしょう。人間に聞こえようが聞こえまいが音は音です。

学生：なるほど、音の定義が狭すぎたからその定義を広げただけですね。だとすると、超関数も関数の定義を広げたものということですか？

先生：さすが飲み込みが早いね、そのとおり、定義を広げたものなんですね。

学生：だったら、そういう名前にすればいいじゃないですか。「超」なんていうから何か関数を超えた別次元のすごく高級なものあるいは場合によってはおどろおどろしいものにも聞こえて、素人ははなからびびっちゃいますよ。

先生：確かにそうだね。たとえ学術用語であっても呼び名は分かりやすいものがいいよね。君ならどんな名前を付けるかね？

学生：定義を広げた関数だから、例えば「一般化された関数」とかなんとか...

先生：うまい、いいねー。実は超関数の英語名は generalized function となっている。つまり正に君のいう「一般化された関数」そのものですね。ひょっとして君は天才じゃないかい？Dirac の生まれ変わりかね。

学生：ま、まーね、ひょっとしたらね、いひひひ。で、Diracってデルタ関数の Dirac でしょ、知ってます！

先生：デルタ関数の Dirac...、どっちかというと Dirac のデルタ関数が正解かも知れないけどね。とにかくそのデルタ関数が超関数の第 1 号でしょうね [1]。もっとも、易しい工学の教科書にはデルタ関数は超関数だと断りながらもあたかも普通の関数であるかの如くに説明しているものが少なくないが、ま、それも普通の関数の概念で理解しようとする苦心の結果と思いましょう。さて、いきなりデルタ関数の説明に入るのもいいが、その前に「関数」の復習をしておこうか。なにしろそ関数を一般化したのが超関数だからね。

学生：わかりました、そうしましょう。でも今から授業がありますので、また来ます。

2 関数から汎関数

2.1 関数の復習

学生：今日はー。関数の復習に来ました。

先生：おお、早速裏を返しに来たね。

学生：裏を返す?何ですかそれ。別にトンボ返りするつもりはないですよこんなところで。

先生：裏を返すというのはね、遊郭などで一度買った遊女を再び... いや、何、その、まあ、要するに一度行ったところへまた行くという意味だよ。

学生：なるほど、そういう意味ですか。リピータになると言うことですね。

先生：うーんちょっと違うね。裏を返すというのは 2 度目のことだけを指すんだよ。何度もリピートするリピータのことは「なじみ」と... いや、な、何でもない、こんなことよそで大きな声で言うんじゃないよ。さ、つまらんこと言ってないでさっさと関数の復習に入ろう。で、関数って何だか知ってますか?

学生：(つまらんこと言ってるのはそっちでしょ、ッたく。) え?ああ、関数ですか?関数というのは、例えば、$y = f(x)$ と書いたとき、x の値にある規則 f を適用して得られる値を y と置くと読み、その規則のことを関数という。まあ、こんなところでしょう。

先生：結構結構、すばらしい。いうならば、実数値 x に実数値 y を対応づける規則のことを関数と言うんだね。つまり、最初に原因となる x を決めれば規則 f、つまり、関数 f によって結果として y の値が決まることになる。ここで、ちょっと記法について説明しておこう。君の言うように $y = f(x)$ と書けば原因が x、規則が f、そして結果が y だということがよく分かるね。このとき、このままでは f がどんな規則かと言うこは分からないから必要に応じて別に書いておかないと分からない。どうせそうなら、x が原因で結果が y であることを短く $y(x)$ と書き、x と

[1] Temple[4] によると、最初にデルタ関数を提案したのは Kirchhoff（1882）であり、その後 Heaviside(1893,1894) がたびたび使い、そして Dirac が本式に使用したということらしい。

y の因果関係つまり規則は $y(x)$ という記述の中に暗黙のうちに含まれていることにしてもいいよね。必要があればその規則は別に記せばいいんだから。このとき、$y(x)$ は「y は x の関数である」と読むことになっている。

学生： ええ、ええ、それくらいのことは中学生でも知っていますよ、なにもここでことさらのように言われなくても。

先生： ま、ま、そんなにとんがらからないで。トンガラカッタトンガラカッタっておもちゃの兵隊じゃないんだから。

学生： 別に尖らかっちゃいませんよ。

2.2 拡張された関数、汎関数

先生： さて、では、最初の x はどうやって決める?

学生： どうやって決めるったって、どうもこうもないでしょう、勝手に決めればいいじゃないですか。

先生： そう、そうね。でも、そうじゃなく、君の意志とは無関係に別のことが原因で x の値が決まることもあるでしょう。

学生： そりゃそういうこともあるでしょうね。だからどうだっていうんですか。何で決まろうと、決まってしまったらそれでいいでしょう。

先生： 確かに。ただ、それでは何が原因で x が決まったかかということが分からないでしょ。それを分かるようにするにはどうすればいいだろう？

学生： ふむ、そう来たか。うーん、原因 x にはさらに別の原因があったという訳か...。つまり、x は別の原因の関数になっているということか。

先生： うまいうまい。例えば、その元の原因を t としておくと、どうなりますか？

学生： つまり、$x(t)$ ということですね。とすると...、t が原因で決まった x をさらに原因として y が決まる、つまり、y は関数 $x(t)$ のそのまた関数である...か。分かった、$y(x(t))$ と書けばいいんだ。

先生： 大正解！つまり、y は t の関数 x の関数である。最初の関数の定義では、原因 x も結果 y も数値であったが、この「関数の関数」は原因が数値でなく関数になっている。つまり、関数の概念の一種の拡張ですね。この拡張された関数のことを汎関数といいます。

学生： ははー、これが汎関数ですか。いやね、汎関数ってどこかで聞いたことあるんですよ。よく覚えていないけど、解析学の講義で聞いたんだったかなー...。自慢じゃないが関数だってろくに分かっていないのに汎関数なんて自分とは関係のない何処か遠くの世界の話に思えていましたが、こうやって聞くと、嘘でも少しゃ分かったような気になりますね。

先生： まあね、嘘でもいいからまずは分かったような気になって、バリアが一つ外れるということはいいことですよ。

学生： しかしですよ、僕は数学科の学生ではないし、何も汎関数の話まで聞いたってしょうがないような気がするんですがネー。一体どんなときに出てくるんですか、汎関数は。

先生： なるほど。確か君は将来信号処理かなんかやりたいって言っていたよね。そもそも信号って何ですか?

学生： し、信号って何かと言われても、... 信号は信号でしょう。

先生： 例えば交通信号のことですか?

学生： いや、まあ、その、交通信号も信号には違いないですが、僕の言うのはもっと、そのう...。そう、例えば、毎日の気温のように時間とともにその値が変化するようなもの、のことです。あ！そうか、時間を t とし、気温を x で表すと気温 x は時間 t の関数、つまり、$x(t)$ と書ける。だから、t の関数 x を信号という、ま、こんな感じです。

先生： いいですねー。信号は関数の一種ということになりますね。

学生： 実際に気温 x と時間 t との間のどんな規則関係があるのかは知りませんがね。ま、そんな規則を見付けることは気象屋さんの仕事でしょうからどっちでもいいですけどね。

先生： それは違うんではないですか？そのような隠れた規則を見付け出すことは気象屋さんの仕事でもありますが、信号解析の重要な役割の一つでもあります。ま、それはさておき、信号処理をやりたいと言うのだから、フーリエ変換って知っていますよね。

学生： ええ、知っています。

先生： 信号 $x(t)$ が可積分、つまり、$\int |x(t)|dt < \infty$ でなければフーリエ変換はできないってこと知っていますか?

学生：はい、絶対積分が発散しないという条件ですね、確か応用数学で教わりました。

先生:そうです。ここで「絶対値をとって積分する」という規則を f と置けば、$x(t)$ に f を適用して得られる結果、つまり絶対積分値 $y=\int|x(t)|dt$ は $y=f(x(t))$ とかけるから汎関数ですね?

学生：はー、これが汎関数ですか。こんなものいくらでもありそうですね。

先生:そう、いくらでも考えられますから自分でいくつか例を作ってみるといいでしょう。それはそれとしてここではちょっと変わった例を挙げましょうか。

3 超関数

3.1 超関数は汎関数

先生：いま、「与えられた関数 $x(t)$ の $t=0$ の値だけを取り出す」という規則 f を考ましょう。f は関数 $x(t)$ に対して一つの実数値 $x(0)$ を割り当てる規則ですから当然汎関数ですね? このことを式で書くとどうなります?

学生:えーと、$x(t)$ に規則 f を適用して得られる値 y は $y=x(0)$ でなければならないから、$x(0)=f(x(t))$、これでいいですか?

先生：結構ですよ。さて、考えようによっては、$x(0)$ は信号 $x(t)$ の特別な点ですから、この汎関数は $x(t)$ からその特徴量の一つを抽出するものとも言えます。

学生：ははー、まるでパターン認識の特徴抽出の話みたいで、まさに信号処理ですね。

先生：規則 f は関数 $x(t)$ に対して適用されるものですが、$x(t)$ は t の関数ですから、強引な言い方をすれば、f は結局のところ変数 t に対して適用されるとも言えなくもないですね。そこで、規則 f を敢えて $f(t)$ と書いてみましょう。そして、この汎関数は $f(t)$ と $x(t)$ の「対」として意味を持つわけですから、この対を $(f(t),x(t))$ と書いておきます。そうすると、この汎関数は $x(0)=(f(t),x(t))$ とも書けますね?

学生：はいはい、...、まあ、そうですね。ところで、よく、$f(t)$ と $x(t)$ の内積演算を $(f(t),x(t))$ と書くことがあるようですが、もちろん、それとこれとは...関係ない... ですよね？

先生：いい勘してますねー。実はその内積のつもりで話をしています。だんだんと話が強引になるようですが、試しに君の言うように内積だとするとこの汎関数は $x(0)=\int f(t)x(t)dx$ と書けます。なんだかどこかで見たような式だと思いませんか?

学生：見たことあります！Dirac のデルタ関数 $\delta(t)$ じゃないですか？

$$x(0)=\int\delta(t)x(t)dx \tag{1}$$

ですからね。

先生：すばらしい、完璧です。君もなかなかですね。

学生：まあね、時々天才じゃないかって言われますから、いひひ...、え？だとすると、ひょっとしてこの汎関数は超関数 $\delta(t)$ ですか？

先生：その通り。実は超関数というのは汎関数の 1 種なんです。

学生：ひえー！いきなり超関数の結論になっちゃいましたね。$\delta(t)$ については、その面積は 1 で、$t\neq 0$ では $\delta(t)=0$、$t=0$ では $\delta(t)=\infty$ の値をとる関数とかなんとかの説明を受けていましたが、...

先生：ええ、そういう説明あるいは「定義」はよく見かけますし、そう思って使われることが多いようです。実際、Dirac 自身も $t=0$ を含む小さな領域以外では 0 の値を取り、その領域内での面積は 1 になる関数を考え、その小さな領域を無限に小さくしたものと考えればよい、といっています [1]。でも普通の関数として考えるとなんだか変ですよね。一点だけで無限大の値をとると言われてもなんだか分からないし、仮に $t=0$ の一点に無限に長い（高い）直線が立っていたとしても、そこ以外が 0 なら面積は 0 でしょう。だって平面に体積は定義されないと同じように、線に面積はないでしょう。だから、デルタ関数をそれまで知られていた普通の関数として理解しようというのは無理だともいえます。でも、そういう説明により、$\delta(t)$ の形がおぼろげながら目に見えるようで、何となく分かったような気にさせられますし、おまけにそれで実際に使えるわけですから、あながちけしからんとはいえませんね。

学生：なるほど、分かった気になれば次に進もうという気もおこりますからね。それに、超関数といえども汎関数だから特別おどろおどろしいものでもないんですね。でも、汎関数と言えばなんとなく、ま、

関数を拡張したものと思えるのに、超関数と言われれば関数なんかお呼びでないようなものに感じられ、全然違うものに思えちゃいます。超関数と汎関数、…チョウとハンの響きからも「丁」と「半」のように互いに真逆のような感じをもつのは僕だけですかね。
先生：ははー、丁半ですか。そんなものを連想するなんて君何かそんなようなことやっているんじゃないだろうね、猪鹿蝶とか…、い、いや、なんでもない。ところで、実は超関数の英語名は generalized function だけでなく、その数学的理論の流儀によって Schwarz の distribution とか佐藤の hyperfunction などと呼ばれたりする。日本語の超関数は佐藤の hyperfunction からきたのかもしれないですね。
学生：へー、そうですか。ま、とにかく用語でびびることはやめます。で、結局、汎関数が実は超関数、これでいいですね?
先生：いや違います。あくまで、超関数は汎関数の一種に過ぎず、超関数でない汎関数は5万とあります。

3.2 どんな汎関数が超関数か？

学生:ふーん、超関数は汎関数だがすべての汎関数が超関数という訳ではない、か。じゃ、汎関数 $(f(t), x(t))$ が

$$(f(t), x(t)) = \int f(t)x(t)dt \tag{2}$$

と書ければ超関数なんですか?
先生：いや、それも違います。第一、デルタ関数は上式のようには書けないんです。
学生：え？だって式 (1) と書けるじゃないんですか？
先生：そこですよ。
学生：何処です？キョロキョロ。
先生：漫才やってちゃいけません。式 (1) のように書けるためには $\delta(t)$ は任意の t に対して必ずある実数値が定まる普通の関数でなければいけません。しかし、$\delta(t)$ はそのような普通の関数ではありませんから、本当は式 (1) とは書けず、元に戻って $(\delta(t), x(t)) = x(0)$、いや、もっと厳密に言えば $\delta(t)$ の t も削って $(\delta, x(t)) = x(0)$ と書くべきなんです。でも、多少強引でも、君の言うように $\int \delta(t)dt = 1$ で、かつ $\delta(t) = 0\ (t \neq 0), = \infty\ (t = 0)$ と考えて式 (1) のように書けば、直観的に理解しやすいですよね。いざとなったら原点に戻るつもりでみんなが納得するなら多少強引でもいい、ということでしょうね。
学生：なるほど、やっぱり直観的理解は大切にすべきと言うことか。でも本当は、超関数 $(f(t), x(t))$、いや、$(f, x(t))$ を式 (2) の右辺のように内積で表現するのは単に便宜上のことに過ぎない、ということですね？
先生：いやそうでもない。
学生：えー、また違うんですか?いったい本当のところはなんなんですか？
先生：まあまあ、そんなに短気を起こさないで。要するに、式 (2) のように書ける超関数もあれば、そう書けない超関数もある。そしてそう書けない超関数でも、便宜上そう書くこともある、というだけのことです。
学生：ああそうか。なーんだ簡単なことだ。
先生：そう、物事を難しく考えてあまりいいことはないですから、自分でも理解できる簡単なことだと思えば、次に進む元気も出るでしょう。その出た元気でもう少しだけ超関数の定義をはっきりさせておきましょう。言葉に慣れておくのも必要ですからね。
学生：よし、ふんどし締めて気合いを入れてっと。
先生：便宜上であることも含めて式 (2) を利用することを念頭に置きましょう。$f(t)$ が t のどの限られた範囲でも絶対積分可能（局所絶対積分可能）なら、式 (2) で示される内積は線形でかつ連続になります ([2], 1.3)。線形と連続の意味は脚注に示しておきますのでそれを見てください [2]。実はこの連続性と線形性がキーワードになります。でも、我々素人としてはあまりその厳密性にとらわれず、それらがキーワードだということを知っていることにして先に進みましょう。実際後で述べるように Lighthill はこのキーワードを要請しないで超関数を定義しています（第 3.3.2 節参照）[3]。とにかく、$f(t)$ が局所絶対積分可能かどうかに関わらず、また、式 (2) が成立するかどうかに関わらず、全ての汎関数 $(f, x(t))$ の中から線形でかつ連続なものだけを集めましょう。こう

[2] 線形とは任意の 2 つの関数 $x_1(t), x_2(t)$ と任意の 2 つの実数 a_1, a_2 に対して $\int f(t)\{a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\}dt = a_1\int f(t)x_1(t)dt + a_2\int x_2(t)dt$ が成立すること。線形とは列 $x_1, x_2, \ldots$ がゼロに収束すれば $\int f(t)x_1(t)dt, \int f(t)x_2(t)dt, \ldots$ もゼロに収束するという意味。

やって集められた汎関数全てを超関数と名付けます。
学生：うーむ、ちょっと見、難しそうになってきましたが、要するに、5 万とある汎関数の中で、線形性と連続性を満たすものだけが超関数と呼ばれ、その中には式 (2) のように書けるものもあれば、書けないものもある。そしてたとえそう書けなかったとしても、たとえばデルタ関数がそうであったように便宜上式 (2) のように書いて話を進めることもある。これでいいですか？
先生：パチパチパチパチ、お、み、ご、と、お、み、ご、と。
学生：なんか馬鹿にしてません?でもまいいや、なんだか分かったような気がしてきたから。

3.3 いよいよ超関数の定義

3.3.1 定義 – その１ –

学生：ところで先生、超関数なんておどろおどろしい名前のものだから、原因となる関数 $x(t)$ として普通では考える必要もないような何か特別な関数だけを考える、なんてことはないですよね？
先生：いい質問ですねー。それ大事なことです。君のような心配を杞人の憂いとすべく、超関数の対象となる関数 $x(t)$ は変な関数にならないように決められているのです。つまり、$x(t)$ は有界な台をもち、かつ、何回でも微分可能な関数と決められています。有界な台の関数とは、ま、いうなれば、限られた t の範囲以外では 0 になる関数という意味です。もちろん、この有限台のクラスでは小さすぎると言うこともありますので、$x(t)$ はそれ自身ととその全ての導関数がどんな多項式よりも早く減衰する、言い換えると、$1/|t|$ のどんなべき乗より早く 0 に近づく関数のクラスまで広げることもできます。このような関数を急減少関数と言いますが、例えば、$x(t) = e^{-t^2}$ は急減少関数です。つまり、$x(t)$ はへんてこな関数でなく、ごく自然な「よい」関数ということになりますね。超関数で用いられる原因としての $x(t)$ にはこの急減少関数が用いられることになっています。このことを表すのに「$x(t)$ は試験関数（テスト関数）とする」などというのが普通ですが、次で出てくる Lighthill に倣ってここでは急減少関数を単に「よい関数」と呼びましょう。
という訳で、超関数の定義を簡単にまとめると、

> よい関数上で定義される連続線形汎関数
> を超関数という

となります。
学生：ははー、ずいぶんと短くなりましたね。いきなり読むと、難しそうな用語が出てきて面食らいますが、これらの意味は（だいたい）分かっていますからもう驚きません。

3.3.2 定義 – その２ –

先生：そうです、ちょっと難しそうな用語が出てきても驚いたりびびったりしないことですね。それもそうですし、もっと言うと、我々素人を驚かさないように古典的な数学だけを使って超関数を解き明かしてくれる理論があれば一番いいですね。流体力学を多少かじった人なら誰でも知っている Sir M. J. Lighthill という物理学者が示した超関数の定義 [3] （日本語訳：[5]）はまさに我々素人を喜ばせるものと思いますので、その定義もここに示しておきましょう。君はガウス密度関数の標準偏差を限りなく 0 に近づけるとデルタ数になるなんて話聞いたことないですか?
学生：ああ、そういえばそんな話がありましたね。確かにガウス分布 $p(t)$ の面積は 1 ですし、標準偏差を限りなく 0 に近づけるとこの分布は幅がぺっちゃんこんなって $t = 0$ 以外では限りなく 0 に近づき、デルタ関数みたいになりますから素人にはとても分かりやすい。でも、デルタ関数は普通の関数ではないですから、普通の関数 $p(t)$ の極限が普通の関数じゃないなんて変じゃないですか?これも、たとえ変であっても直観的に分かりやすけりゃそれでいい、ってやつですか。
先生：そこですよ。
学生：え、何処ですか、キョロキョロ。
先生：また漫才を。普通の関数には収束しなくても汎関数として収束すると考えれば問題ないでしょう。例えば、確率変数列の収束の概念はいくつかあって、$X_1, X_2, \ldots$ が X へ法則収束（弱収束）するというのは、X_n の確率分布 $P_n(x)$ が X の確率分布 $P(x)$ に収

束するという意味であって、必ずしも X_n が普通の意味で X に収束（各点収束）することではないですよね。普通の関数の列がある超関数に収束するというのもこれに似ています。つまり普通の関数の列 $\{f_n\}$ があって、これと任意のよい関数 $x(t)$ の組 $(f_n, x(t))$ がある汎関数 $(f, x(t))$ に収束するとき、$\{f_n\}$ は f に収束（弱収束）したと考えるわけです。このときの収束先の関数 f は普通の関数になるかも知れないがそうでないかも知れないので、これを超関数と呼ぶというわけですね。

学生：ふーん、... そうですか...、いまいちの感じでだまされたような気もしますが、たとえば、この世の人はいくら年をとってもこの世の人には違いないが、三途の川を越えて無限年先に行っちゃうと人は人でもあの世の人になる、ってなところですか？

先生：ひえ！もの凄い喩えですね。でも、ま、そう思えば分かるのならそれでもいいんじゃないですか。

たとえば、先ほど君が言ったガウス密度関数の例を挙げましょう。いま、$\sigma_n = 1/n$ というパラメータを持つ普通の関数としてのガウス密度関数

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-t^2/(2\sigma_n^2)}$$

を考えれば $(f_n, x(t)) \to x(0)$ $(n \to \infty)$ となりますから $(f_n, x(t)) \to (\delta, x(t))$ $(n \to \infty)$ と書け、これによりデルタ関数 $\delta = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ が定義されたことになりますよね。

このようにガウス密度関数の極限でデルタ関数を定義する考えは Temple[4] によると既に Kirchhoff（1882年）によって示されているそうです。関数の極限で超関数を定義するというこの考えはそのあと Mikusinski(1948年), Temple(1952年) そして Lighthill(1958年) へと引き継がれたそうです。

学生：なるほど、ガウス分布の極限でデルタ関数を理解するというちょっと素人っぽい考えにも立派な裏付けができたというわけですね。でもちょっと待てよ、ガウス分布でない、うまい他の関数を同じようにぺっちゃんこにしても同じデルタ関数ができるなんて話を聞いたことがあります。そんなこともアリですか?

先生：ええ、アリです。2つの関数列があって、どんなよい関数に対しても同じ弱収束点が見つかるなら、この2つの関数列は同じ超関数を定めるものとするのです。Lighthill[3] に従って超関数の定義を簡単に書くと次のようでしょうね。

> あるよい関数の列 $\{f_n(t)\}$ と任意のよい関数 $x(t)$ の内積の極限
>
> $$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)x(t)dt \qquad (3)$$
>
> が存在するとき $\{f_n(t)\}$ は超関数 $f(t)$ を定めるといい
>
> $$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)x(t)dt \qquad (4)$$
>
> と書く。ただし、式 (4) は (3) の意味である。

この定義は先の「定義 – その1 –」のように連続線形性の話が出てきません。この条件は本当は必要なのでしょうが、実際にそれが生きてくる場面は少なく、これがなくても十分議論が展開でき、かつ、話が易しくなるのだそうです。

3.4 デルタ関数以外に超関数はあるのか？

学生：でも先生、超関数の定義は、ま、分かった気になったとしても、デルタ関数以外にどんな超関数があるのかさっぱり見当がつきません。超関数なんてそんなに多くはないんでしょ?

先生：それがねー、5万とあるのです。

学生：え？また5万ですか。何でもかんでも5万とあるのですね。しかもその5万とある超関数は全て汎関数であり、また、もしその汎関数 f が式 (2) のように書ければそれは普通の関数なんですね。なのに僕はデルタ関数しか知らない。世の中には僕の知らない（汎）関数が山ほどあるんですね。

先生：そうかなー、君はもうすでにいま、たくさんの超関数を知っているって言ったじゃないですか。

学生：はあ？そんなこと言ってませんよ。

先生：だって、君は今、超関数 f が式 (2) のように書ければそれは普通の関数だって言ったじゃないですか。式 (2) のように書ける普通の関数を君は山ほど知っているはずですよ。

学生：え？式 (2) のように書ける関数 $f(t)$ は全部超関数、... なるほど、自分で言ってますね。ちょ、ちょっ

と待って下さい、今考えるから。超関数となる普通の関数 $f(t)$ とは何か、とにかく難しく考えないこと、ですね?簡単な $f(t)$ となると、うーん、... 思い切って一番簡単に $f(t)=1$ とやってみると、$\int f(t)x(t)dx = \int 1\cdot x(t)dx = \int x(t)dx$ か。これは $x(t)$ の面積を与える超関数になりますね。へー、めちゃくちゃ簡単!こんなのならいくらでも上げられますよ僕だって。なんかつまらない、拍子抜けですね。

先生:いいじゃないですかそれでも、超関数って聞いただけでびびっちゃうよりはね。でもね、超関数をもっと勉強すれば、証明できなくても直観的にそうだろうなと言われてきたことが超関数のおかげで証明できたり、やたら難しい証明が必要だった問題が意外に簡単に証明できたり、さらには、直観的に「そりゃないでしょ」というようなことが実は本当だったと分かったりすることもありますよ。

たとえば、正弦波形 $\sin\omega t$ は $t\to\infty$ なる無限遠でどうなると思いますか？

学生:どうなるもこうなるもありませんよ。正弦波はどんなに時間が経っても永遠に同じ波形が繰り返されるだけですよ。

先生:ところがドンチャン、$\sin\omega t$ を超関数として考え直してみると、なんと、これは 0 に収束するのです。つまり、$\sin\omega t\to 0$ $(t\to\infty)$ が成立するのですね。

学生:え!? そんな馬鹿な。いくら超関数論で証明できたからといっても、そんなことを認めるのは僕の直観が許さないな。

先生:そこですよ。オッと待った!「え?何処?キョロキョロ」はやめてくださいね。人の直観というものは鍛えられることもあるでしょう。超関数論で証明されたことが君の直観で理解できないとしたら、それは君の直観が超関数以前の数学によって養われたからなのかもしれませんよ。つまり、超関数以前の数学では説明しきれなかった事実が超関数によって証明されたと考えるのが筋でしょう。

学生:はー、そう考えればいい訳か。まだしっくりこないけど、もしそうだとすると、おもしろいですね。実際にはどうやって $\sin\omega t\to 0$ $(t\to\infty)$ を証明するのか教えてくださいよ。よっぽど難しい証明になるんですか？

先生:いや、証明は簡単です。君にもすぐ理解できると思います。ちょっとやってみましょうか。議論の流れに合うように、ここでは $\sin\omega t\to 0$ $(\omega\to\infty)$ を証明します。必要なら ω と t を入れ替えれば $\sin\omega t\to 0$ $(t\to\infty)$ の証明になりますから。

いま、任意のよい関数 $x(t)$ と超関数 $\sin\omega t$ の積の積分を考えると、部分積分により

$$\int_{\infty}^{\infty}\sin\omega t\cdot x(t)dt = -\frac{1}{\omega}\cos\omega t\cdot x(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\omega}\int_{\infty}^{\infty}\cos\omega t\cdot x'(t)dt \tag{5}$$

となりますね。従って、ここで $\omega\to\infty$ とすれば上式右辺は 0 になりますから、

$$\int_{\infty}^{\infty}\sin\omega t\cdot x(t)dt\to 0 \qquad (\omega\to 0) \tag{6}$$

であり、これはどんなよい関数 $x(t)$ にたいしても成り立ちますから、$\sin\omega t\to 0$ $(\omega\to\infty)$ がいえます。はい証明終了。

学生:ポカン...、お、終わりですか...。

先生:ところで、君が先ほど考えついた超関数 $f=1$ を Lighthill の定義から導いておきましょう。関数列 $\{e^{-t^2/n^2}\}$ はよい関数の列です。このよい関数列の $n\to\infty$ における極限は 1 になりますから

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/n^2}x(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty}1\cdot x(t)dt \tag{7}$$

と書けます。だから関数列 $\{e^{-t^2/n^2}\}$ は超関数 $f=1$ を定める関数列ですね。

4 超関数の微分

4.1 デルタ関数の微分とは？

先生:デルタ関数の微分って知ってますか?

学生:そんなもの微分できますか?だって、デルタ関数は普通の関数ではないんでしょう?

先生:そこですよ。

学生:また、「そこ」ですか。

先生:超関数の微分にはそれなりの定義があり、それに従えばどんな超関数も無限界微分ができます。そのことを説明するため、例によってデルタ関数を内積 $(\delta,x(t))=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)x(t)dt$ と書き、また、デルタ

関数の導関数 $\delta'(t)$ があるとしてこれも $(\delta', x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)x(t)dt$ と書きましょう。君は部分積分を知っていますか?この式の右辺の積分を部分積分で表すとどうなります?

学生：ば、馬鹿にしちゃいけませんよ、部分積分くらいできますよ。

（えーと、さっきの $\sin\omega t \to 0$ $(\omega \to \infty)$ の証明にも部分積分は出てきたから、…

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)x(t)dt = \delta(t)x(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)x'(t)dt$$

だな。… 待てよ、このままだとまた何か言われるな。うーん、と、右辺第 1 項が怪しいな、何だろうこれ?そうか、$\delta(t)$ の無限遠点は当然 0 だし、$x(t)$ も試験関数だからやはり無限遠点は 0 だから、いずれにしてもこの項自身は 0 となる…、よし！）

分かりました先生、これでしょう！

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)x(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)x'(t)dt = -x'(0)$$

先生：すばらしい、さすが天才もどき。結局、デルタ関数の微分は $x(t)$ の導関数 $x'(t)$ の符号を反転させたものの原点での値 $x'(0)$ を与える超関数と言うことになりますね。

学生：ははー、なるほどね。不思議なものですね。しかしまてよ、そもそもデルタ関数は内積の形で書けないはずですよね。それを無理に内積の形で書い上で成り立つこの論理はおかしいのじゃないですか?

先生：そのとおり。でもね、内積の形に書けようが書けまいが、超関数 f の導関数 f' を最初から

$$(f', x(t)) = (f, -x'(t)) \tag{8}$$

と定義しておけば、デルタ関数についても $(\delta', x(t)) = (\delta, -x(t)) = -x'(0)$ と書けるでしょ?そしてこうしておけば、超関数の導関数の連続線形性は保証されますし、試験関数は何回でも微分可能関数ですから、たとえば 2 階微分 f'' は

$$(f'', x(t)) = (f', -x'(t)) = (f, x''(t)) \tag{9}$$

となり、結局超関数は何回でも微分可能になりますね。以下、超関数として求めた導関数を導超関数と呼ぶことにします。

学生：うーむ、そうか。四の五の言わずに式 (8) で導超関数を定義しておけばいいという訳か。素人目にもすっきりしてますね。

4.2 連続関数の微分

4.2.1 微分可能関数の微分

先生：ここで、微分可能な普通の関数の導関数を超関数の微分を使って求めてみましょう。

学生：微分可能な関数の微分の話に何もわざわざ超関数を持ち出さなくてもいいではないですか。

先生：でもま、知っているところから積み上げるのは理解の助けになるでしょうから、ま、文句を言わずにやってみましょう。先ほど君が考えついた普通の関数 $f(t) = 1$ は微分可能ですね。これををやってみましょう。つまり、超関数 $f = 1$ の導超関数はどんな超関数になりますか？

学生：そんなの簡単でしょう。$f(t) = 1$ を微分すると $f'(t) = 0$ だから、$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)x(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} 0\cdot x(t)dt = 0$ となる。従って、超関数 $f = 1$ の導関数 f' はどんなよい関数 $x(t)$ に対してもいつでも値 0 を与える超関数ですね。

先生：50 点。

学生：え？50 点？どうしてですか？

先生：ま、いいんだけどね。だけど、やっぱり超関数の話をしているんだから、超関数 $f = 1$ に対してきちんと式 (8) の導超関数の定義をあてはめて、その結果が $f'(t) = 0$ と同じ結果になると言ってもらわないとね。

学生：ああ、そうか。じゃやってみよう。式 (8) を使うと、

$$\begin{aligned}(f', x(t)) &= -(f, x'(t)) = -(1, x'(t)) \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} 1\cdot x'(t)dt = -x(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0\end{aligned} \tag{10}$$

だからやっぱり $f' = 0$ と考える以外にないですね。

先生：結構結構。一般に次が言えます。普通の関数 $f(t)$ もその導関数 $f'(t)$ も（ほとんど至るところで）連続であれば $\int f'(t)x(t)dt$ なる積分は可能で、それは部分積分により

$$\begin{aligned}\int f'(t)x(t)dt &= f(t)x(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)x'(t)dt \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)x'(t)dt = (f, -x'(t))\end{aligned} \tag{11}$$

が言えます。上式右辺 $(f, -x'(t))$ は超関数 f の微分を意味しますから、結局このような関数 $f(t)$ の導関数 $f'(t)$ と導超関数 f' は一致するといえます。
学生：ふむ、よくできました。あ、いや、なに、ちょっと言ってみたかっただけです。

4.2.2　微分不可能な連続関数の微分の例

先生：今度は、関数 $f(t)$ は連続であるが微分可能でない関数を考えましょう。たとえば

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ t & (t \geq 0) \end{cases} \tag{12}$$

は $t = 0$ で角張っていますから微分できません。しかし、この関数は局所積分可能ですから第 3.2 節で見たように超関数とみなせます。従って、式 (8) により超関数微分は可能ですね。というわけで、君、この関数の導超関数を求めて下さい。
学生：えー、またやるんですか。しょうがないなー。えーと、式 (8) に式 (12) を代入すると、

$$(f', x(t)) = -(f, x'(t)) = -\int_0^\infty tx'(t)dt \tag{13}$$

はい、できました…（ちょっとまてよ、これで止まったら、意地悪教師に「それがどうしたの？」とかなんとか言われかねないな。うーんと、なんだか右辺はまた部分積分したくなっちゃう形だな。でもそれって式 (13) を右から左に辿ってまた元に戻っちゃうかもね。でもものは試し、やってみよう）

$$\begin{aligned} -\int_0^\infty tx'(t)dt &= -\left[tx(t)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty x(t)dt \right] \\ &= \int_0^\infty x(t)dt \end{aligned} \tag{14}$$

（ふむ、うまくいったな。これくらいすっきりしていれば、意地悪教師もイチャモンつけようがないだろう）はい、できました。見ての通り式 (12) の関数の導超関数は、よい関数の $t \geq 0$ の領域での面積与える超関数となります。
先生：90 点。
学生：え、またー、100 点じゃないの？
先生：ま、確かに上出来の部類に入りますが、もう一押しすれば、おー、なるほど、ととなりますね。$(-\infty < t < \infty)$ で定義される君の知っている簡単で適当な関数 $u(t)$ を考え、その $u(t)$ と $x(t)$ の内積 $\int_{-\infty}^\infty u(t)x(t)dt$ が上式最後の $\int_0^\infty x(t)dt$ と同じになる、というようなそんな関数 $u(t)$ はありませんかね?
学生：簡単な関数 $u(t)$ ね…、うん？なぜ関数を表す記号が g とか h でなくて $u(t)$ なんだ？… あー、はいはいはい、ステップ関数

$$u(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t \geq 0) \end{cases} \tag{15}$$

ですね [3]（センちゃん、隠れたヒントをくれるなんて結構優しいジャン）。そうすれば、

$$\int_{-\infty}^\infty u(t)x(t)dt = \int_0^\infty x(t)dt \tag{17}$$

だから、結局

$$(f', x(t)) = \int_{-\infty}^\infty u(t)x(t)dt \tag{18}$$

と書ける。じゃじゃーん、先生、できました。式 (12) の関数の導超関数はステップ関数 $u(t)$ です。
先生：結構毛だらけ猫灰だらけ、おけつの周りはク…。ま、なんですよ、よくできました。

4.3　不連続関数の微分

4.3.1　ステップ関数の微分

先生：さて、次にはいよいよ連続でない関数 $f(t)$ を考えてみましょう。連続でない関数は当然微分可能関数ではありません。たとえば、式 (15) のステップ関数は $t = 0$ で微分できないですね。しかしこの関数はどんな有限区間をとっても積分可能、つまり局所積分可能であり、よい関数との内積が存在しますから超関数と見なせます。というわけですからこのステップ関数の導超関数は…
学生：あ、僕がやります。だいぶん自信がついてきたし、こんなの見るからに式 (12) の関数より簡単そ

[3] 式 (15) はステップ関数と呼ばれるが、この式の右辺下段の $t \geq 0$ を $t > 0$ とした関数

$$H(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t > 0) \end{cases} \tag{16}$$

は Heaviside 関数と呼ばれる。ここでの文脈では $u(t)$ を使っても $H(t)$ を使ってもかまわない。

うだから。えーっと、忠実に超関数の微分の定義式 (8) に戻ってやると、

$$
\begin{aligned}
(u', x(t)) =& (u, -x'(t)) = -\int_{-\infty}^{\infty} u(t)x'(t)dt \\
=& -\int_{0}^{\infty} x'(t)dt = -x(t)\Big|_{0}^{\infty} = x(0)
\end{aligned} \tag{19}
$$

だから、u' はよい関数の $t=0$ での値 $x(0)$ を与える超関数ということになる。ということは、つまり、そのー、そう！デルタ関数だ！はい、というわけでステップ関数の導超関数はデルタ関数

$$
u' = \delta(t) \tag{20}
$$

です。

先生：いいですねー、大したものです。

4.3.2 区分的連続関数の微分

先生：じゃ、さらに進んで、区分的に連続な関数で、その連続な部分での導関数も連続であるような関数、はやい話区分的連続な導関数を持つ区分的連続関数の導超関数を求めてみましょう。簡単な例で、そうですね、式 (12) の関数をちょいといじって、$t \geq 0$ の部分が c だけ上に持ち上がった関数にしてみましょう。

$$
f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ t + c & (t \geq 0) \end{cases} \tag{21}
$$

この関数は原点 $t=0$ で c だけジャンプしています。これを超関数と見てその導超関数を求めて下さい。

学生：これもあまり難しくなさそうだぞ。だって、式 (13) の右辺の $-\int_0^\infty tx'(t)$ が $-\int_0^\infty (t+c)x'(t)$ に変わるだけだからな。だから、

$$
\begin{aligned}
(f', x(t)) =& -\int_{0}^{\infty} (t+c)x'(t)dt \\
=& -\int_{0}^{\infty} tx'(t)dt - c\int_{0}^{\infty} x'(t)dt
\end{aligned} \tag{22}
$$

（スラスラ）

だな。上式右辺の第 1 項は式 (14) と (17) からわかるように

$$
-\int_{0}^{\infty} tx'(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)x(t)dt \tag{23}
$$

（スラスラ）

となる。また式 (19) を見ると、

$$
-\int_{0}^{\infty} x'(t)dt = x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)x(t)dt \tag{24}
$$

（スラスラ）

だから、

$$
-c\int_{0}^{\infty} x'(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} c\delta(t)x(t)dt \tag{25}
$$

（スラスラ）

である。で、結局上 2 式を式 (13), に代入すると

$$
\begin{aligned}
(f', x(t)) =& \int_{-\infty}^{\infty} u(t)x(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} c\delta(t)x(t)dt \\
=& \int_{-\infty}^{\infty} [u(t) + c\delta(t)]x(t)dt
\end{aligned} \tag{26}
$$

（スラスラ）

ということですな。つまり、式 (21) なる関数の導超関数は

$$
f' = u(t) + c\delta(t) \tag{27}
$$

（スラスラ）

となる。

先生：ずいぶんとスラスラできましたね。最初からステップ関数を使うともうちょっとスラスラできますよ。つまり、説明の都合上式 (12) を $g(t)$ と置き直すと式 (21) は

$$
f(t) = g(t) + cu(t) \tag{28}
$$

と書けますね。そうすると上式右辺の第 1 項 $g(t)$ の超関数微分は式 (18) より $g' = u(t)$、そして第 2 項 $cu(t)$ の微分は式 (20) により $u' = \delta(t)$ ですから、結局上式 $f(t)$ の導超関数として君と同じ式 (27) が得られます。

学生：へー、ジャンプはステップ関数を使って表現しておけばいいわけか、なるほどね。で、結局、式 (21) の関数 $f(t)$ の導超関数は不連続点 $t=0$ の点を除いては式 (12) の関数の導関数と一致し、$t=0$ ではデルタ関数の c 倍として与えられるというわけか。

先生：そのとおり。では問題をもうちょっと一般化して、図 1 のように $t=a$ で c だけジャンプする関数 $f(t)$ の導超関数を求めて下さい。

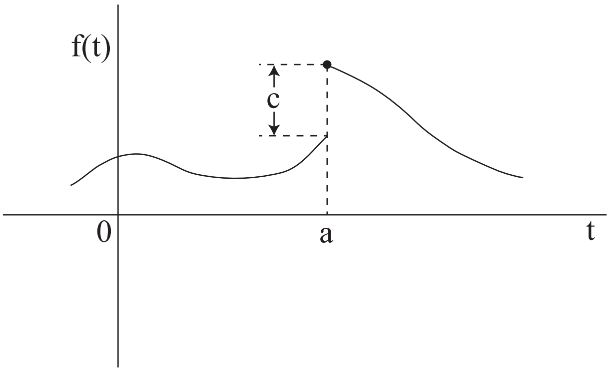

図 1: ジャンプをもつ関数

学生 : ははーん、早い話、この図の関数 $f(t)$ のジャンプ部分をステップ関数で表し、$f(t)$ 自身を式 (28) のように書けばいいわけだ。つまり、図の関数の $t=a$ における高さ c のジャンプ信号は $cu(t-a)$ と書けるから、$f(t)$ からジャンプを取り除いて連続にした関数を $g(t)=f(t)-cu(t-a)$ とおけば図 1 の関数 $f(t)$ は、

$$f(t) = g(t) + cu(t-a) \tag{29}$$

となる。ここで、右辺の $g(t)$ は連続関数だが図から見ても明らかに $t=a$ の繋ぎ目では角張っていて微分できそうにない。しかしそこは超関数の威力を借りればよく、それで求まる導超関数を g' と置く。また、例によってステップ関数の導超関数はデルタ関数だから $cu(t-a)$ の導超関数は $c\delta(t-a)$ である。従って、$f(t)$ の導超関数は

$$f' = g' + c\delta(t-a) \tag{30}$$

と書ける。

先生 : いいですねー、完璧です。この手を使えば、複数の点でジャンプをもつような不連続関数でもそれに対応する導超関数を求めることが出来ます。つまり、n 個の点 $t_1, t_2, \ldots, t_n$ でそれぞれの高さが $c_1, c_2, \ldots, c_n$ であるようなジャンプをもつ不連続関数を $f(t)$ としましょう。このとき、これらのジャンプは $\sum_{i=1}^{n} c_n u(t-t_i)$ で表されますから、$f(t)$ からジャンプを取り除いて得られる連続関数は $g(t) = f(t) - \sum_{i=1}^{n} c_n u(t-t_i)$ で与えられます。従って、不連続関数 $f(t)$ は

$$f(t) = g(t) + \sum_{i=1}^{n} c_n u(t-t_i) \tag{31}$$

と書けて、その導超関数は

$$f' = g' + \sum_{i=1}^{n} c_i \delta(t-t_i) \tag{32}$$

で与えられます。もちろんジャンプの高さ c_i は正でも負でもよく、正の場合は上側へのジャンプ、負の場合は下側へのジャンプを表します、念のため。

5 超関数のフーリエ変換

先生 : 超関数の微分の話はひとまず置いといて、フーリエ変換の話をちょいとかじりましょうか。

学生 : 超関数のフーリエ変換？超関数って、僕のシロちゃんとしての理解で言えば、...

先生 : な、何ですか「シロちゃん」って？

学生 : しろうとだからシロちゃんです。先生はクロちゃんです。

先生 : なるほど。でも、ま、私も超関数に関して言えばシロちゃんですがね。もっとも、君よりは少しクロちゃんに近いからブチかな。（まるで犬だな。）で、君のシロちゃんとしての理解で言えば何だね?

学生 : つまり、超関数って、ま、内積で表される汎関数でしょ?そんなもののフーリエ変換なんてできるんですか？

先生 : だって、その内積のはずの超関数が微分できたでしょ？というより、微分を定義できたでしょ? そして、超関数 f と見なせる普通の関数 $f(t)$ にその超関数の微分を適用して得られる導関数 f' は普通の関数 $f(t)$ の微分可能領域における導関数 $f'(t)$ と一致しましたよね。つまり、超関数微分は普通の微分の拡張になっているのです。超関数のフーリエ変換でも同じで、うまい超関数のフーリエ変換が定義でき、その定義が従来の普通の関数のフーリエ変換を包含していて矛盾を生じなければよいわけですね。

学生 : なるほど。新しい理論は古い理論を否定するのではなく、それを包含する矛盾のないものでなければならないわけか。

5.1 デルタ関数のフーリエ変換

先生：さて、例によってデルタ関数をとりあげましょう。デルタ関数 $\delta(t)$ を普通の関数のように扱うとそのフーリエ変換がどうなるかやってみて下さい。ただし、フーリエ変換に出てくる周波数を角周波数 ω とするとはフーリエ変換と逆変換の際の係数 2π または $\sqrt{2\pi}$ などが目障りですからいわゆる周波数 $\omega/2\pi$ を用いることにしましょう。そして通常 $f = \omega/2\pi$ で表される周波数の記号をこのまま f にしておくと、今まで使ってきた超関数 f と紛らわしいですから、そうですね、$\xi = \omega/2\pi$ と置いて下さい。

学生：ギリシャ文字の ξ ですか。なんだかギリシャ文字が出てくると急に難しくなったような気がするが、びびらないようにしなくっちゃ。さて、$\delta(t)$ のフーリエ変換は $\int \delta(t)e^{-j2\pi\xi t}dt$ だから、うーんと、...、えーっと、...、あれ？これって $\delta(t)$ と複素正弦波 $e^{-j2\pi\xi t}$ の内積の形だからこれ自身が超関数を意味するんじゃないかなあ。もしそうだとすると $e^{-j2\pi\xi t}$ はよい関数でなければならなはずだがそうなのなのかなー？よい関数でない関数に対してもこんな内積考えていいのかな？えーい！なんだか知らないけどシロちゃんの強み、闇雲にやっちゃえ。
エイヤッ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j2\pi\xi t}dt = e^0 = 1 \tag{33}$$

となりました、先生。

先生：良くできました。

学生：良くできましたったって、よい関数かどうかも分からない $e^{-j2\pi\xi t}$ に超関数の内積を当てはめちゃっていいのかなあ?。そもそもこの先生の話には乱暴なことが多いんだよね。

先生：なんだか不服そうですね。君の気持ちなんとなく見当がつきますがね。でも、ある高名な物理学の先生（山内恭彦）は「数学というものはなかなかよくできていて，2 トン積みのトラックに 4 トン積んでも結構走る」と言われたそうです。確かに数学の素人が本来の適用範囲を無視して数学の定理や公式をエイヤッと使ったところ結構うまくいったなんてことありますよね。そもそもデルタ関数が生まれたのもそんなところがあったのかもしれませんね。素人は強いですよね。というより、数学は思った以上に頑健（ロバスト）なのかもしれません。

学生：ははー、そういうものですか。よーし、これからは遠慮せずイケイケドンドンで数学使っちゃお。

先生：しかし、あまり図にのるのは考えものですよ。その先生は「5V の電球を 100V の電線につなぐような無茶」は窘めておられますからね。

学生：ショボン。

先生：さて、君のエイヤッの結果の式 (33) が 5V 電球を 100V につないだ結果なのか、それとも数学の頑健さの結果なのか確かめてみましょう。君はフーリエ変換における内積の保存則を知っていますか？

学生：内積の保存？

先生：じゃ、パーセバルの定理はどうですか?

学生：はいはい、聞いたことありますね。確か、ある関数 $g(t)$ に対してそのフーリエ変換を $G(\xi)$ とすると

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G(\xi)|^2 d\xi \tag{34}$$

が成立する、つまり信号のエネルギー保存則ってやつですよね。

先生：そうです。これをもう少し丁寧に書くと

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)g^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi)G^*(\xi)d\xi \tag{35}$$

と書けるでしょ。ただし、記号 $*$ は複素共役を示します。もちろんいままでのように時間領域の関数を実数値関数と考えれば $g^*(t)$ は $g(t)$ のままでも同じですが、その場合でもそのフーリエ変換は一般に複素関数になりますから $G^*(\xi)$ を $G(\xi)$ と置き換えることはできません。ですから、見た目のバランスも考えて $g^*(t)$ もそのまま $g^*(t)$ としておきましょう。さて、ここで別の関数 $h(t)$ とそのフーリエ変換 $H(\xi)$ を考え、上式の $g^*(t)$ と $G^*(\xi)$ を $h^*(t)$ と $H^*(\xi)$ に置き換えてみると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)h^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi)H^*(\xi)d\xi \tag{36}$$

となり、これは $g(t)$ と $h(t)$ の時間領域での内積と周波数領域での内積が等しい、つまり、フーリエ変換において内積が保存されることを意味しています。これ自体をパーセバルの定理と呼ぶこともあります。

学生：なるほど、で、それがどうかしましたか?

先生：ど、どうかしましたかって、あのねえ、少しは自分で考えたらどうですか、エ、キミ? といってもちょっと無理かな。ヒントを出しましょう。まず、デルタ関数

のような特異なものも含め超関数 f を任意のよい関数 $x(t)$ との内積と考えると、$(f, x(t)) = \int f(t)x^*(t)dt$ ですね。もちろんこの $x(t)$ は実数値関数ですから $x^*(t)$ は $x(t)$ と書いてもよいのですが、一般性を保つため $x^*(t)$ としておきます。さて、このような準備の元で式 (36) を参考にしてデルタ関数 $\delta(t)$ のフーリエ変換を求めて下さい。ただし、$\delta(t)$ のフーリエ変換はまだどうなるか分かりませんから $\mathcal{F}_\delta(\xi)$ と書くことにしましょう。さ、やって下さい。

学生：...

先生：どうしたの？早くやってください、、さ、さ、どうなる、どうなる、ど—なるか — !! 。

学生：お、脅かしっこなしですよ。やりますよやりますよ、怖いんだから、もう。えーっと、式 (36) の記号をただ置き換えればいいんですよね、...、つまり、$g(t)$ を $\delta(t)$、$h(t)$ をよい関数 $x(t)$ とすると

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_\delta(\xi)X^*(\xi)d\xi \tag{37}$$

ですね。...

(ここで止まると、また怒られそう。しかしこれをどうしろって言うんだろう。うーーんっと、右辺は何のことか分からないが左辺は今度こそ超関数の内積だから 左辺 $= x^*(0) = x(0)$ だな。ということは 右辺 $= x(0)$ でもある。つまり、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_\delta(\xi)X^*(\xi)d\xi = x(0) \tag{38}$$

ということだ。だからどうなんだろう?... まてよ、そもそも $X^(\xi)$ は $x(t)$ のフーリエ変換だから逆に $x(t)$ は $X(\xi)$ の逆フーリエ変換であり、複素共役で考え直すと

$$\int_{-\infty}^{\infty} X^*(\xi)e^{j\xi t}d\xi = x^*(t) = x(t) \tag{39}$$

だな。この式で $t = 0$ と置くとで、

$$\int_{-\infty}^{\infty} X^*(\xi)d\xi = x(0) \tag{40}$$

だから、これと式 (38) を比較すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_\delta(\xi)X^*(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\xi)d\xi \tag{41}$$

かな。うむうむ、なるほど分かった。

できました先生、

$$\mathcal{F}_\delta(\xi) = 1 \tag{42}$$

です。!! 僕が闇雲にやった式 (33) のデルタ関数のフーリエ変換はちゃんとパーセバルの定理から得られる結果と一致しました。つまり、式 (33) は 100V につながれた 5V 電球ではなかったということになります。どんなもんです、これで先生のお怒りも解けましょう。

先生：まあね。

学生：まあね？さんざんやらしておいて「まあね」はないでしょう。これで足りないのなら、えーと、うーんと、うーーーーーーう！

先生：うなってますね。ま、無理もないでしょう。いやいやここまでできたのなら立派なもんですよ。足りないことはですね、デルタ関数のフーリエ変換も当然超関数ですよね。だとしたら式 (37) の右辺の内積も当然超関数を示す内積でなければなりません。ということはよい関数 $x(t)$ のフーリエ変換 $X(\xi)$ もよい関数でなければなりません。つまり、$X(\xi)$ がよい関数かどうかを確かめる作業が残っていると言うことです。

5.2 よい関数が急減少関数でなけりゃだめな理由

学生：つまり、よい関数のフーリエ変換はよい関数かどうかということですね。えーと、そもそもよい関数とは何なのかというと、...、えーと....

先生：本稿の「定義 – その 1 –」(3.3.1) を見ると、まず、「超関数の対象となる関数 $x(t)$ は... 有界な台をもち、かつ、何回でも微分可能な関数と決められています。」とあるでしょう。これが最初のよい関数の定義です。しかし、有界な台をもつ関数のフーリエ変換（により求まる周波数領域での関数）の台は有界ではありえません。

学生：は、はー、例のフーリエ変換における不確定性原理ってやつですね。

先生：「原理」よいうほどのものではなく、ま、不確定性関係といったものですね。

学生：つまり、例えば、時間領域でこじんまりまとまった関数のフーリエ変換は周波数領域では無限に広がる関数になってしまう。通信工学の話で言えば、あるデジタル放送局ができるだけ幅の短いパルス波形を使って短い時間内になるべくたくさんの情報を伝送しようとすると、その放送局が占有する周波数領域はめちゃくちゃ広くなり他の放送局の周波数領域にはみ出して混線してしまう。そこで、なるべく時間幅が短くかつ占有する周波数幅も広がらないパ

ルス波形は何か、ということが問題になるが、その波形はいわゆるガウス型波形であって、云々かんぬん、ぺらぺらぺらぺら...

先生:分かった、分かった、...、もうそれくらいで、....、ス・ト・ッ・プ !! ... 実はもうあまり時間がなく、君との話しも早々に切り上げなくてはならなくなったのです。全ては私に責任があるのですが、このままのんびりやっていると、本稿を掲載していただいている研究会の会長さんに大変な迷惑がかかるのです。というわけですから少し駆け足で進みましょう。

学生：分かりました。しかし、先生はあっちこっちで迷惑を振りまいているんですね。

先生:面目ない。君にそう言われると落ち込んでしまいますが、ま、とにかく頑張りましょう。ま、そういう訳で、「有界台」という制限のつくよい関数のフーリエ変換はよい関数でなくなってしまいます。ということは、式 (37) において右辺の $x(t)$ がよい関数であったとしてもその左辺の $X(\xi)$ はもはやよい関数ではなくなり式 (37) は超関数として意味を持たなくなります。フーリエ変換に言及するまでの超関数の議論であれば有界台に制限されたよい関数のままで問題はなかったのですが、話をフーリエ変換まで広げて式 (37) に意味を持たせるとなると話は変わってくるということです。

学生:なるほど、それで、「定義 – その 1 –」(3.3.1) のさらなる記述「... この有限台のクラスでは小さすぎると言うこともありますので、$x(t)$ はそれ自身とその全ての導関数がどんな多項式よりも早く減衰する、言い換えると、$1/|t|$ のどんなべき乗より早く 0 に近づく関数のクラスまで広げることもできます。このような関数を急減少関数と言います」が生きてくるわけですね。

先生：そうです。超関数のフーリエ変換を議論するにはよい関数の定義をこの程度に、つまり、急減少関数にまで広げないといけないというわけです。

学生：急減少関数にまで広げれば十分なんですか？

先生：ええ。なぜかかというと、急減少関数のフーリエ変換はやはり急減少関数になることがわかっているからです。先ほど君もガウス型の関数は時間領域でも周波数領域でもまとまった関数だ、云々かんぬんと言っていましたよね。そのガウス型の関数はまさにこの急減少関数の代表例ですね。ガウス型関数は急減少関数であり、ガウス型関数のフーリエ変換はガウス型関数になりますからやはり急減少関数となります。

学生：へー、そうつながりますか。やっぱり僕は天才かしら、ウフフ。あ、いやあ、エヘン。ま、しかし、その、なんですね、有界台がだめならせめてそれを少し広げ、台が有界とは言わないまでも、せめて急激に減少する関数にすれば何とか問題をクリアできる、というわけですね。だけど待ってくださいよ、なんでそんなにチマチマ広げるんですか。いっそのこと全ての垣根を取っ払って、すべての関数をよい関数と認めればいいじゃないですか。なんだか超関数論ってケツの穴小さいなー。

先生：ケ、ケツの穴... 悪化しつつあるおいどの調子がますます悪くなりそうな言い方は止めてほしいね。しかし、ま、確かに、よい関数の範囲をチマチマ広げてじれったく思うかもしれませんが、範囲を広げるのに慎重になるにはそれなりの理由があるからです。

学生：してその理由とは？

先生：まず初心に戻って、なぜ、最初はよい関数を台が有界なものに限ったかを考えてみましょう。何故でしたかね？

学生：なぜかって聞かれればですね...、そもそも、超関数の話をしているんですよね。だから、そのー、つまり超関数とは何かってことですよ。

先生：そうです。

学生：えーと、要するに、超関数の定義の話だから、そう、「定義 – その 1 –」(3.3.1) の最後の方に「よい関数上で定義される連続線形汎関数を超関数という」とあります。

先生：そう、そのとおり。もしある普通の関数 $f(t)$ が超関数の一員と見なせるとすると、$f(t)$ とよい関数 $x(t)$ の汎関数は式 (2) の右辺のように積分の形で表されるでしょ？この積分が発散しては意味を持ちません。つまり、この積分はある有限の値を持たなければならないのです。

学生：はいはい、そうでした。... だから？

先生：だとすれば、$f(t)$ と $x(t)$ のいずれか一方または両方に厳しい制限をつけてこの積分が発散しないようにすればいいわけです。

学生：はあ、それで最初はよい関数 $x(t)$ に有界台と

いう厳しい制限をつけたという訳ですか。なるほどね、...。しかしなんですよ、別に $x(t)$ にばかり厳しくしないでもいいじゃないですか。これじゃよい関数がかわいそう。

先生：かわいそうって、君も意外にロマンチストですね。でもね、何ごとも情に流されて本質を見失ってはいけません。$x(t)$ に制限をつけなければ、$f(t)$ に制限をつけなければならなくなります。そうすると、超関数と見なせる普通の関数の範囲が狭くなってしまいます。下手すりゃごく限られた数少ない関数だけが超関数と見なせるなんてことになります。

学生：それだっていいじゃないですか。

先生：それでいいですかねえー。そもそも超関数というのは、例えばそれまでは微分不可能と思われていた関数の微分を可能にする、というように数学をより使いやすく便利なものにするためのものでしょ。そのために先人がいろいろ苦労して創りあげてきたものです。なのに、せっかく苦労して作り上げたはいいが、ほとんどの普通の関数がその新しい数学の恩恵にあづかることができないのでは意味が無いでしょう。大枚の税金を使って作り上げた箱物施設なのにそれを利用する人が居ないければ税金の無駄遣いでしょ。

学生：へー、税金の無駄遣いですか。超関数といえども、広く一般庶民としての普通の関数が参画できなければ意味が無いというわけか。了解、了解。

先生：ま、そういうわけで、よい関数 $x(t)$ には最初は台が有界でなければならないという制限が付けられていた。しかし、それでは超関数のフーリエ変換が定義できない。そこで、泣く泣くその制限を外すことになるが、あまり制限を緩めすぎると、一般庶民としての普通の関数が超関数の恩恵を享受できなくなる。だから、普通の関数がなるべく多く参画できるようによい関数の制限緩和も最小限に留める努力をする。その結果、急減少関数をよい関数のクラスとすればよいということになった、というわけですね。

学生：そういうわけか、なるほどね。しかし、昔の偉い数学者は急減少関数なんてものをよく考え出しましたですね、ま、だから「偉い」のでしょうがね。

先生：確かに偉いのですが、その偉い学者が何も無から有を生じるような手妻遣いだったたわけではないようですよ。というのは、最初の定義に基づく有界台のよい関数 $x(t)$ のフーリエ変換 $X(\xi)$ を考えると、それが急減少関数になっていることが分かったのです。そして一般に急減少関数のフーリエ変換または逆変換もやはり急減少関数であることも比較的簡単に証明できますから、急減少関数のクラスをよい関数のクラスと考えればよいということになったようですね。

学生：ははー、奥が深いというか、うまく出来てるもんですね。

5.3 結局、超関数のフーリエ変換とは

先生：少し長くなりましたからここで一応まとめておきましょう。普通の関数の超関数も普通の関数でない超関数もどちらも含めて超関数を今までどおり $f(t)$ と置きます。そしてとりあえず $f(t)$ のフーリエ変換が存在したとしてこれを $\mathcal{F}_f(\xi)$ とします。このとき、任意のよい関数 $x(t)$ とそのフーリエ変換に対して、パーセバルの定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_f(\xi)X^*(\xi)d\xi \tag{43}$$

が成立します。ここで、$x(t)$ はよい関数ですからいわゆる可積分つまり絶対積分可能であり、当然そのフーリエ変換 $X(\xi)$ は普通の意味で存在します。さて、いまはとりあえず $\mathcal{F}_f(\xi)$ が存在するとしましたが、本当に $\mathcal{F}_f(\xi)$ が存在するかどうかは上式に意味があるかどうか、つまり、上式が有限の値を持つかどうかで決まります。上式右辺は $\mathcal{F}_f(\xi)$ はまだ海のものとも山のものともはっきりしませんから結局上式が意味を持つかどうかは左辺が定まった値を持つかどうかで決まります。

学生：なるほどなるほど。しかしですね、超関数を式 (43) のように内積で書くのは便宜上のことでしたよね。だとしたら、そもそもパーセバルの定理なんてもの使えないんじゃないですか？

先生：えらい !!

学生：ぎゃ !... 驚いたなー、もー。

先生：ごめんごめん。確かに君のいうとおりです。でもね、パーセバルの定理はあくまで超関数のフーリエ変換を考えるための手がかりです。これをヒント

に超関数 f に対して

$$(f, x(t)) = (\mathcal{F}_f, X(\xi)) \tag{44}$$

なる関係を想定したらどうでしょう [4]。

学生：そりゃま、考えるのは勝手ですけどね。考えてどうするんです？

先生：上式で f を普通の関数 $f(t)$ とすれば両辺とも内積の形になり式 (43) が導かれるでしょ。つまり、上式は超関数に対するパーセバルの定理の拡張版になっているわけです。そこで、この式を使い、超関数 f のフーリエ変換を

> 超関数 f に対して式 (44) の左辺の値が定まるとき、同式を満たす $\mathcal{F}_f$ を f のフーリエ変換という。

と定義してしまうのです。こうすれば、仮に f が普通の関数だったとしたら、単に式 (44) が式 (43) になるだけですから、普通の関数のフーリエ変換と矛盾しません。

学生：なるほどねー。確か、超関数の微分の話の時もそうだったように、もう端から超関数の場合の定義を与えておいて、それが従来の普通の関数の場合の定義に矛盾しませんよ、って言えばいいわけか。

5.4 超関数のフーリエ変換の簡単な計算例

先生：そのとおり。では、式 (44) を使いデルタ関数のフーリエ変換を確認して下さい。

学生：えーと、$f = \delta$ と置くと $(\delta, x(t)) = x^*(0) = x(0)$ だから、式 (44) の左辺は確かに定まった値になる。だから超関数 δ のフーリエ変換は

$$(\mathcal{F}_\delta, X^*(\xi)) = (\delta, x^*(t)) = x(0) \tag{45}$$

を満たす $\mathcal{F}_\delta$ として定められる。... で、この先どうなるんですか、先生？

先生：どうなるもこうなるも、試しに $\mathcal{F}_\delta$ を普通の関数 $\mathcal{F}_\delta(\xi)$ と考えて見るとどうなります？

学生：どうなるかって、そりゃどうなるもこうなるも、普通の関数なんだから上式左辺は内積の形に書き換えられて、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_\delta(\xi) X^*(\xi) d\xi = x(0) \tag{46}$$

ですよね。...、ウン?... これって式 (38) と同じじゃないか。ということは式 (42) と同じく $\mathcal{F}_\delta(\xi) = 1$ なる解答が得られるということか。ウヒャーすばらしい！

先生：すばらしい、で終わってしまわないで次に進んで下さい。

学生：次？

先生：フーリエ変換ができたんだからその逆つまり $\mathcal{F}_\delta(\xi) = 1$ なる関数のフーリエ逆変換をやってみましょう。

学生：やってみましょうって、何もやってみるまでもないじゃないですか。これはデルタ関数のフーリエ変換なんだから逆変換すればもとのデルタ関数に戻るのは自明じゃないですか。

先生：そうかな？そもそも $\mathcal{F}_\delta(\xi) = 1$ のフーリエ逆変換なんて出来るのかい？

学生:かい?貝もアワビもないですよ。できるに決まってます。こんな簡単な普通の関数のフーリエ（逆）変換ができないわけはない。

先生：見た目が簡単だからといって何でもかんでもフーリエ（逆）変換できるわけじゃないでしょ。関数がフーリエ変換できるための条件って何でしたか?

学生:そりゃ、その関数が可積分つまり絶対積分可能ということですよ、... エ?... だめだこりゃ、$\mathcal{F}_\delta(\xi) = 1$ は可積分でないですね。まいったなこりゃ。だめです。$\mathcal{F}_\delta(\xi) = 1$ のフーリエ逆変換は存在しません。だから、デルタ関数に戻ることはありません。

先生：いやにあきらめが早いですね。君は今なんの話しをしているんです？

学生：何の話って、超関数の話に決まっているじゃないですか。... あー、あー、...

先生：まるでカラスだね。

学生：あー、そうか。$\mathcal{F}_\delta(\xi) = 1$ を超関数と考えて式 (44) を逆に使えばいいんだ。そうすると、式 (44) の右辺は $(\mathcal{F}_\delta, X(\xi)) = (1, X(\xi)) = \int 1 \cdot X^*(\xi) d\xi = x(0)$ だから $\mathcal{F}_\delta$ のフーリエ逆変換 f は式 (44) より

$$(f, x(t)) = x(0) \tag{47}$$

---

[4] 2 つのパラメータ t, ξ を含む超関数 $f(t,\xi)(= f(t)e^{-jt\xi})$ の t に関する（広義）積分 $\mathcal{F}_f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t,\xi)dt$ を超関数 f のフーリエ変換と考え、よい関数 $X(\xi)$ に対して $(\mathcal{F}_f, X(\xi))$ が存在すればこの広義積分すなわちフーリエ変換 $\mathcal{F}_f(\xi)$ が存在すると定義する。このとき、$\mathcal{F}_f(\xi)$ の存在と $(f, x(t))$ の値が定まることは同等となり、式 (44) の関係が成立する（[6]、p41,42,45）。

を満たさなければならない。これはまさにデルタ関数の定義そのものだから、結局、$\mathcal{F}_\delta(\xi) = 1$ のフーリエ逆変換はデルタ関数である。めでたしめでたし。

先生：あっぱれあっぱれ。見上げたもんだよ屋根屋のフンドシ...、いや、その、たいしたもんだよイナゴのションベ...、いやなに、さすが天才もどき。

学生：なに分けのわからないことを。しかし、なるほどねー、本来ならばフーリエ変換が存在しないと考えられていた関数も超関数論を使えばみごとにフーリエ変換又は逆変換が定まるという、まことにもって分かり易い素人受けのする例ですねー。これからこの例を使ってみんなを驚かせてやろう。これでますます僕の天才のほまれ高まるだろうな、イヒヒ。

先生：なにをニヤニヤしているんだね？事のついでだから、そうだね、パラメータ a をもつ超関数

$$(f_a, x(t)) = x(a) \tag{48}$$

を考えましょう。この超関数 f_a って何だか分かりますか？

学生：そうですねー、...。デルタ関数が $x(t)$ の原点 $t=0$ の値 $x(0)$ を指定する関数だったのに対して f_a は $t=a$ の値を指定する関数ということになりますね。だから f_a や δ を普通の関数みたいに考えると $f_a(t) = \delta(t-a)$ って感じですかね？

先生：結構結構。そこで、この f_a、つまり $\delta(t-a)$ のフーリエ変換を考えるとどうなります？

学生：これは簡単そうだな。えー、面倒だから、適当に内積の形で書くと、$(f_a, x(t)) = \int \delta(t-a)x^*(t)dt = x^*(a) = x(a)$ となるから、式 (44) を使うと

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_{f_a}(\xi) X^*(\xi) d\xi = x^*(a) \tag{49}$$

となる... か... ウーン...、何だろうこれ？まてよ、左辺は周波数領域での演算で右辺は時間領域での表現だから、何か左辺はフーリエ逆変換みたいな感じ...、そうか、$\mathcal{F}_{f_a}(\xi) = e^{-j2\pi\xi a}$ と置くと

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi\xi a} X^*(\xi) d\xi = x^*(a) = x(a) \tag{50}$$

と、ドンピシャだ。つまり、$\delta(t-a)$ のフーリエ変換は $e^{-j2\pi\xi a}$ ですね？

先生：大いに結構。では、複素正弦波 $e^{j2\pi\xi_0 t}$ のフーリエ変換は？

学生：簡単、簡単。$\delta(\xi - \xi_0)$ でしょ？

先生：ウム。では正弦波 $\sin 2\pi\xi_0 t$ と余弦波 $\cos 2\pi\xi_0 t$ のフーリエ変換は？

学生：$\sin 2\pi\xi_0 t = (e^{j2\pi\xi_0 t} - e^{-j2\pi\xi_0 t})/2$、$\cos 2\pi\xi_0 t = (e^{j2\pi\xi_0 t} + e^{-j2\pi\xi_0 t})/2$ だから、これらのフーリエ変換はそれぞれ $(\delta(\xi-\xi_0) - \delta(\xi+\xi_0))/2$、$(\delta(\xi-\xi_0) + \delta(\xi+\xi_0))/2$ です。...、あー、あー、

先生：またカラスですか。

学生：あー、こういう超関数論の裏付けがあるから、可積分でないためフーリエ変換できないはずの $e^{j\xi_0 t}$ や $\sin \xi_0 t$、$\cos \xi_0 t$ に対してみんな

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi\xi_0 t} e^{-j2\pi\xi t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(\xi-\xi_0)t} dt = \delta(\xi - \xi_0)$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin 2\pi\xi_0 t e^{-j2\pi\xi t} dt = \frac{1}{2}\left\{\delta(\xi-\xi_0) - \delta(\xi+\xi_0)\right\}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos 2\pi\xi_0 t e^{-j2\pi\xi t} dt = \frac{1}{2}\left\{\delta(\xi-\xi_0) + \delta(\xi+\xi_0)\right\}$$

と書いて平然としているんですね。

先生：そういうことですね。例えば、いわゆる白色雑音（ランダムウォーク）の相関関数のフーリエ変換として定義されるパワースペクトルが完全に平坦になるのは信号解析やっているものなら誰でも知っていることですが、中にはその数学的裏付けが超関数論にあるということを知らない人もいるかもしれません。でも本来は超関数の範囲であるはずのことを、通常の数学の範囲でもそれなりに理解できるならそれはむしろ歓迎すべきことでしょう。数学の大衆化とでも申しましょうか...

学生：ははー、数学の大衆化ですか、一億総数学化社会ですね。

先生：なんですかそれ、どこかの国のやすっぽいキャッチフレーズみたいですね。それはともかく、一時巷で話題になったいわゆる $1/f$ ノイズは、数学的にはフラクショナルブラウン運動として説明できますが、その相関関数とスペクトルのいささか面倒な数学的関係も超関数論を援用することにより割と簡単に理解できます。しかし、この辺になるとまだ大衆化が進んでいるとはいえませんね。

学生：ふーん、そういうもんですかね。でもそんなことはどうでもいいや。それよりも先生、超関数って何だか面白くない、ツーか、ムシが好かんですね。

先生：ムシが好かん？もうそろそろ切り上げないことには本当にこの研究会の会長さんに申し訳ないことになるから、一言大向こうをうならせることを言ってメデタシメデタシといきたかったのに、ムシが好かんとは聞き捨てならん。なぜです？

学生：なぜかってそうでしょう。今までの先生の話を聞いていると、要するに、超関数は普通の数学ではできないと思われていた関数の微分を可能にする、そして、やはり従来の数学ではできないとされてきた関数のフーリエ変換を可能にする、このようにして、従来の数学をさらに拡張して使いやすくするものですよね。だけどですよ先生、超関数の微分を定義する式 (8) を見ると、超関数 f を微分して f' を得るのではなく、右辺から分かるように実際にはよい関数の微分 $x'(t)$ がその本質を担っているわけですよね。フーリエ変換だってそうですよ、超関数のフーリエ変換を定義する式 (44) を見れば分かりますが、超関数 f がフーリエ変換されるわけでなく、実際にフーリエ変換を担っているのはよい関数 $x(t)$ のフーリエ変換 $X(\xi)$ ですよ。何だか超関数てずるいと思いません？面倒なことは部下（よい関数）に押し付けておいて手柄は自分のものにするいやらしい部長とか、若い研究者の論文に自分の名前をねじ込んで、成果を横取りしてしまう無能教授とか、どうもイメージ悪いですね。

先生：無、無能教授。も、申し訳無い。面目ない。しかしですよ、こう考えてみてはどうですか？つまりですね、若くて有望な社員がなにか新しいことを抵抗を押し切ってでもやろうとするとき、「分かった。正しいと思うならぜひやって見給え。なに、後のことは全部ワシが責任を持つから心配せず行ってこい！」という実に太っ腹の上司（よい関数）がいれば大変心強いですよね。そういう男気（侠気）のある上司としてのよい関数があるからこそ超関数は成功した、とは考えられませんか？

学生：なるほどね、ものは考えようですね。そのほうが気持ちがいいからそういうことにしましょう。先生だってそう考えれば今夜眠れなくなるなんてことが無いでしょうからね。

先生：ウッ、ドキ。な、何か私に遺恨でもあるんですか？しかしま、よかった、よかった。これでお互い気持ちよく終われそうですね。

こうして無能教授も安らかに眠れるようになったそうです。メデタシメデタシ。

6　むすび

最初に大見得を切って始めた「信号理論アラカルト」も第一話で終わってしまうという大失態。本研究会会長簑先生のご厚意に甘えっぱなしで、最後は大迷惑をかけたまま終了するはめになりました。誠に申し訳ありません。深くお詫び申し上げます。ここでさっさと退散すればよいのですが、未練がましく、この最後の「むすび」の章を借りて超関数の導入によりフーリエ変換可能な関数がどこまで広がったかということについて簡単に触れることをお許し願いたいと思います。

緩増加関数　超関数のフーリエ変換の定義式 (44) で、左辺の値が定まれば超関数 f のフーリエ変換 $\mathcal{F}_f$ が定まります。ここで $x(t)$ は急減少関数、つまり、$x \to \infty$ に対して $1/|x|$ のどんなべきよりも早く減衰する関数です。したがって、適当な正数 M が存在して、$t \to \infty$ に対して $|x|^M$ より早く増加することがない普通の関数 $f(t)$ を考えれば $f(t)x(t)$ の積分は収束しますから、式 (44) の左辺の値が定まります。これは普通の関数 $f(t)$ が超関数と見なせるための十分条件の一つにほかなりません。この条件を満たす関数 $f(t)$ を緩増加関数といいます。そして同時に、普通の関数 $f(t)$ が緩増加関数であることは $f(t)$ の超関数論的フーリエ変換が存在するための十分条件でもあるということになります。つまり、$|t| \to \infty$ で発散してしまうような関数でもフーリエ変換できる場合は少なくないことが分かります。このように、普通は絶対積分可能な関数に限られていたフーリエ変換可能関数のクラスが[5]、超関数の導入により大幅に広げられることになったわけです。

というところで、本稿の締めとしたいと思います。どうもありがとうございました。

[5] 2 乗積分可能関数関数は必ずしも絶対積分可能ではありませんが、そのフーリエ変換は存在するとみなされます。実際本稿でも援用したパーセバルの定理はこの 2 乗積分可能なクラスの関数の話です。この 2 乗積分可能なクラスのフーリエ変換理論についてはいずれ機会があればぜひ触れてみたいところです。

参考文献

[1] P. A. M. Dirac. *The principles of Quantum mechanics.* Clarendon Press, Gloucestershire, England, 1967.

[2] I. M. Gel'fand and G. E. Shiloy. *Generalized functions*, Vol. I. Academic Press, New York and London, 1964. Translated by E. Saletan.

[3] M. J. Lighthill. *An introduction to Fourier analysis and generalized functions.* Cambridge University Pres, England, 1958.

[4] G. Temple. Theory and applications of generalized functions. *J. London Math. Soc.* , pp. 134–148, 1953.

[5] M. J. ライトヒル, 高見穎郎（訳）. フーリエ解析と超関数. ダイヤモンド社, 東京, 1975.

[6] 金子晃. 定数係数線型偏微分方程式. 岩波講座 基礎数学 解析学 (II)v. 岩波書店, 東京, 1976.